第 1 卷 第 1 期
2024 年 2 月

原 子 核 物 理 评 论
Nuclear Physics Review

Vol. 1, No. 1
Feb., 2024

文章编号： 1007-4627(2024) 01-0001-07

CNPC2023+ 多重物理约束下 Duflo-Zuker 核质量模型的研究

叶伟虎[1]，钱以斌[1]

(1. 南京理工大学物理学院，南京 210094)

摘要：原子核质量在核物理和核天体研究中扮演着十分重要的角色。尽管当前的理论模型可较好的描述已知核素的质量，但不同模型在外推上仍然存在许多争议，尤其是丰中子区的预言。本文回顾了我们近年来在核质量模型外推研究的主要成果，即使用严格的多目标优化算法将核素质量差 α 衰变能和局域质量关系作为限制条件，缓和质量模型中的过拟合问题，在一定程度上提升模型的外推能力。

关键词：原子核质量；α 衰变能；多目标优化

中图分类号：1　　**文献标志码：**1　　**DOI：**10.11804/NuclPhysRev.01.01.01

1 引言

原子核质量（或称结合能）不仅是研究核内结构信息的有效探针，还是天体物理中研究重元素起源的关键物理量。一方面，核质量给出了核子关联、壳效应、形变等关键信息[1]。另一方面，精确的核质量是核合成网格计算的重要输入[2-4]，这对理解 21 世纪尚未解决的 11 个重大物理难题之三有着重要积极意义，即“宇宙中从铁到铀的元素是如何产生的”。因此，质量测量一直是核科学研究的热点。

实验上可通过直接或间接测量的方法获得约 2500 个核素的质量，而不同理论预言给出在自然界中可存在的核素数目约是 7000-10000[4-5]。目前由于这些未知核素集中在质子滴线区、丰中子区和超重核区，目标核寿命短、产生截面小，精确测量其质量存在着许多技术上的困难。在可预见的将来，不稳定核素质量仍需依赖理论支持。

原子核质量的理论模型通常可分为两类。一类是全局型，另一类为局域型。全局型中精度较好的是宏观-微观和纯微观模型，宏观-微观模型的宏观项指的是描述结合能的平滑项，微观一般指向壳层和对能修正。纯微观模型的经典思想为给定核子相互作用势场，在非相对论下为求解薛定谔方程获得结果，在相对论下则自然为求解狄拉克方程。较为常用的全局型包括 Duflo-Zuker(DZ)[6] 模型、有限力程小液滴模型[7] 和平均场理论[8] 等，其标准差约在 300-600keV[9]。局域型则利用相邻核素间的质量关系间接获得未知核素质量，其理论精度约在 150keV 以内，包括有著名的 Garkev-Kelson(GK) 关系[10-11]、剩余中子-质子相互作用公式[12-13]、同位旋多重态公式[14-15] 等等。国内课题组在局域质量关系中做出了许多重要的发现和拓展，包括对 GK 关系做出进一步推广并确定最优化外推路径的研究[16-17] 和镜像核外推公式的研究[18-19] 等等。关于局域质量关系的更多细节可查阅最新综述[20]。虽然宏观-微观模型的物理思想广度和深度要明显高于局域型，但在一定质量数区域内局域型的结合能精度远远高于全局型。近年来，随着核物理和机器学习交叉学科的兴起，核质量模型的精度获得巨大改善[21-30]，达到 100keV 以内，即满足核合成计算所需的精度需求。但是，近几年间一些科研人员提出了一个尖锐的问题：模型在已知区域核素的精度和未知区域的预言能力是否存在相关性？

不幸的是，Sobiczewsk 等人基于当前流行的数十个质量模型的系统性研究时发现模型在已知区域核素的精度和未知区域的预言能力的相关性较小[31-33]。这在一定程度上表明单一追求结合能的精度可能并不会提升模型计算未知核的预言能力。另外，质量模型还存在着参数化模型的内部矛盾，即过拟合现象。比如，即使 DZ-type 质量模型计算结合能的精度较高，但质量相关量 α 衰变能的精度相对较低[34]。不仅如此，不同质量模型的外推差异显著，在中子滴线附近差异能达到几十个 MeV[34-36]。这些现象在一定程度上表明了质量模型存在不可忽视的过拟合问题。虽然过拟合的模型能够完美重现拟合样本集的数据，但是在预测样本集外的数据时，误差将随着外推距离的增大而增大。

通常，缓和过拟合的主要方案是提供更多的拟合样本，如此可避免算法在某一区间内过度“学习”，进而达

收稿日期：2024-02-23；　**修改日期：**2024-02-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (12075121)；中央高校基本科研业务费专项资金资助 (30922010312)
作者简介：叶伟虎 (1998–)，男，海南海口人，硕士生，从事原子核物理研究；E-mail: whyep@njust.edu.cn
通信作者：E-mail: qyibin@njust.edu.cn

到自由参数全局最优而非局部最优。因此，我们在核质量领域中引入多目标优化算法，将 α 衰变能和 GK 关系作为两个重要条件去约束质量模型。本文旨在通过引入多个物理约束条件，提升质量模型在远距离外推时的预言能力。

2 模型介绍和算法

Duflo-Zuker（DZ）系列是目前研究中使用率较高的质量模型，原因在于其具备较高的理论精度和外推性能，其计算成本也要远远的小于其他同等精度的质量模型。DZ 系列模型包括 DZ10、DZ28 和 DZ33 等[37-38]，本文采用 DZ10 模型为例，给出其多目标优化下的结果。

2.1 DZ10 模型

DZ 模型由宏观部分的液滴项和微观壳模型 monopole 哈密顿项组成。DZ10 模型对一个原子核的基态结合能可以如下表示：

$$\begin{aligned}BE_{DZ10} =& a_1V_C + a_2(M+S) - a_3\frac{M}{\rho} + a_4V_P - a_5V_T \\ &+ a_6V_{TS} + a_7s_3 - a_8\frac{s_3}{\rho} + a_9s_4 + a_{10}d_4\end{aligned} \tag{1}$$

其中：a_i 是由拟合确定的自由参数；a_1、a_4、a_5 和 a_6 分别代表液滴模型里的库仑能、对能、对称能和对称能修正能；其余项是微观价核子修正。

2.2 多目标优化算法

人们在职场和生活中往往会面临许许多多的优化问题。比如，公司收入利润最大化、生活成本最小化等问题。然而，正如事物之间具有相关性，对某一目标要求收益最大化则必然会导致其他相关目标收益降低，因此需要对不同目标间的冲突关系做出阐述，这类同时考虑两个目标以上的优化问题称为多目标优化。多目标优化算法被广泛应用在经济学、工程学等学科[39-41]。多目标优化算法定义了帕累托前沿解（Pareto front），又被称为非劣解解集。非劣解解集中包含了一系列基于不同目标补偿关系所确定的解，非劣解的任何一个解几乎不可能使所有目标同时达到最优的效果，其核心思想是从各个冲突的目标函数条件下寻找尽可能多的补偿解，最终提供用户尽可能多的选择。不失一般性，一个多目标优化问题可以如下表示：

$$\begin{aligned}\min \quad & F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \subset \Omega \\ & lb \leqslant x_i \leqslant ub。\end{aligned} \tag{2}$$

其中：$f_i(x)$ 是目标函数；$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为决策变量；每个决策变量被限制在上界和下界的解空间中。由于多目标优化中涉及多个目标函数的比较，因此无法像单目标优化中单独比较一个函数值就可确定个体的优劣。帕累托支配关系是多目标优化算法的核心要义，其定义解空间中个体的优劣关系。假设解空间中有两个个体 s 和 t，个体 s 支配（优于）个体 t, 并且仅当对 $\forall i = 1, 2, \dots, m, f_i(s) \leqslant f_i(t)$, 并且 $\exists j \epsilon [1, 2, \dots, m]$, 使得 $f_j(s) < f_j(t)$。

3 结果及分析

3.1 α 衰变能的约束

目前，non-dominated sorting genetic algorithm-II (NSGA-II) 仍然是第二代进化算法中使用率最大、引用率最高的算法[42-43]。因此，本文选择此算法对结合能和 α 衰变能进行多目标优化。α 衰变能可由母核和子核的质量差给出，即 $Q_\alpha = BE(Z-2, N-2) + BE_\alpha - BE(Z, N)$。目标函数的构造由理论值和实验值的标准差给出：

$$\sigma_K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\hat{N}}(K^{\text{expt.}} - K^{\text{theo.}})^2}{\hat{N}}} \tag{3}$$

其中：σ_k 为计算理论值和实验值的标准差公式；$\hat{N}$ 为实验样本数，结合能数量为 2340 个，偶偶核 α 衰变能数量为 275 个；k 是对结合能或其他物理量的代称。结合能和 α 衰变能的实验数据取自国内的原子核质量评估 AME2020[44]。图 1为通过 NSGA-II 算法得出的 DZ10 模型非劣解结果图。横、纵轴分别代表结合能和 α 衰变能的标准差。首先，图 1中的左上第一个解可理解成既是结合能精度最优解又是 α 衰变能精度最劣解，而右下的最后一个解则相反。我们可知质量模型中结合能和 α 衰变能的关系是相互冲突的，即结合能精度的提升是以劣化 α 衰变能精度为代价。这告诉我们以往的单目标算法在拟合结合能确定参数时，是以质量为最高优先级的局部最优化，而不是考虑结合能和 α 衰变能多个物理量的全局最优，这可能会使得过拟合问题加重，劣化模型在拟合训练集之外的预言。其次，在考虑了 α 衰变能的数据集后，可获得一系列计算 α 衰变能更占优的解。实际上，α 衰变能是 α 衰变寿命的一个重要决定因素，以往的计算中发现 α 衰变能 0.01MeV 的不确定度最终可影响 α 半衰期一个数量级，这些依赖模型本身获得的 α 衰变能占优解可以对预测重核和超重核的 α 衰变能提供一定支持。近年来，由于不同理论模型在预言实验值之外的区域时往往差异过大，因此理论学家则需要给出模型的系统和统计不确定度来对模型自身的不确定度给出定量描述。基于这几十个非劣解，我们可从给出模型的统计不

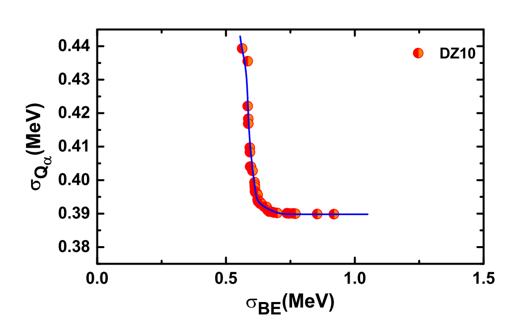


图 1　(在线彩图) 使用 NSGA-II 算法优化 DZ10 质量模型的非劣解结果图

确定度。表 1为 DZ10 模型参数的不确定度。第二列为参数的统计不确定度；第三列为质量最优解的参数旨在给出对比。

基于非劣解解集的统计性，图 2系统性的给出了新的核素边界、双中子分离能和非劣解的外推差异等物理信息。第一，液滴线可利用核子分离能小于零确定，由于偶偶核往往比奇 A 核稳定，所以通过双核子分离能确定的液滴线包含了通过单核子分离能确定的液滴线。图中，$P(S_{2n}<0)$ 为通过双中子分离能确定的该核素是否为非束缚核的概率，$P(S_{2P}<0)$ 为通过双质子分离能确定的该核素是否为非束缚核的概率。第二，我们系统的计算了非劣解的双中子分离能，并取加权平均，大小通过图中左侧数值颜色棒表示。第三，我们采用非劣解解集中的质量最优解和次质量最优解对应参数组，即图 1中最上方相邻的两个解，并计算其之间的的结合能差异，在右下子图表示。此子图清晰表明在有实验值和丰质子区时，外推的差异不超过 0.5MeV，但是在超重核区和丰中子区时，差异则会明显增大。我们考虑到这两个解具备明显偏向质量精度的特征，因此可能会导致大规模外推时过拟合现象加重，最终劣化模型外推的差异。于是，我们从图 1的中间区域任取两个解计算外推的差异。通过比对图 2中子图和图 3，可知中间区域的外推差异要明显的小于质量优解组的外推差异，表明利用平衡结合能和 α 衰变能的非劣解时外推时的不确定度较小。

3.2　Garvey-Kelson 关系的约束

在前文讨论的基础上, 可以对质量模型的约束条件做进一步的探索, 即通过引入局域质量公式来约束模型。本文将 Garvey-Kelson 关系作为限制核质量模型的另外一个条件。过去，J. Barea 等人就提出可对全局型模型拟合时附以局域型约束条件，以此增强全局型模型计算相邻核的连贯性和外推时的预测性[45]，但文中讨论的实践方法较粗糙且冗余。之后，全局型模型往往将 GK 关系作为后验样本，而非限制条件。借助多目标优化算法的优势，我们将 Garvey-Kelson 关系作为一个严格的限制

表 1　DZ10 模型的统计不确定度和质量最优解参数，单位 MeV。

参数	I	II
a_1	0.705 ± 0.001	0.705
a_2	17.735 ± 0.03	17.747
a_3	16.207 ± 0.093	16.251
a_4	5.906 ± 0.58	6.102
a_5	37.303 ± 0.097	37.356
a_6	52.757 ± 0.568	52.661
a_7	0.438 ± 0.009	0.463
a_8	2.006 ± 0.041	2.104
a_9	0.022 ± 0.0005	0.021
a_{10}	39.602 ± 0.591	41.48
σ_{Q_α}	0.397 ± 0.011	0.439
σ_{BE}	0.66 ± 0.083	0.562

条件，对质量模型做出更细致的讨论。

$$\Delta M_{GK}=M(N+2,Z-2)-M(N,Z)+M(N,Z-1)-M(N+1,Z-2)+M(N+1,Z)-M(N+2,Z-1) \tag{4}$$

其中：ΔM_{GK} 是相邻 6 个核素加加减减抵消后的不确定常数，通常在 ±150keV 以内。我们基于式 4从 AME2020 中提取了几百组 $\Delta M_{GK}^{expt.}$ 的实验值，并将理论 DZ10 模型得到的 $\Delta M_{GK}^{theo.}$ 与其做标准差。实际中，基于剩余核子相互作用相互抵消假设，衍生出了许多版本的 GK 关系，可多达数十个。本文简单采用了式 4将其作为可实现案例，表明了利用 GK 关系多目标限制质量模型的可行性，当然也可将式 4替换成其他版本的 GK 关系，这还有待未来做出进一步的检验。图 4为多目标优化算法下以结合能、α 衰变能和 GK 关系给出的非劣解解集图。青色方框包裹的为质量最优解。上文已经谈论过多个物理量的平衡解在外推上可能更可靠，但此说明还仍待进一步确认，下文将对此关键问题做出细致分析。面对如此多的非劣解，如何从中寻找出更有物理意义、更能给出可靠外推值的解是十分关键的问题。由于丰中子核素具备较大的同位旋不对称度，对理论和实验而言预测和测量这些核素质量都是巨大的挑战，且不同理论模型的差异往往集中于丰中子区域。

首先，我们从近几年的实验中提取出尚未包括在 AME2020 中的丰中子核质量数据[46-48]。然后采用 DZ10 的质量最优解计算这些核的标准差并将其作为一个理论基准值，若其余的非劣解给出比此基准值精度更好的标准差时，将保存这些非劣解并归入到潜力解解集。事实上，非劣解的数目高达几百个，但筛选出来的只有几十个

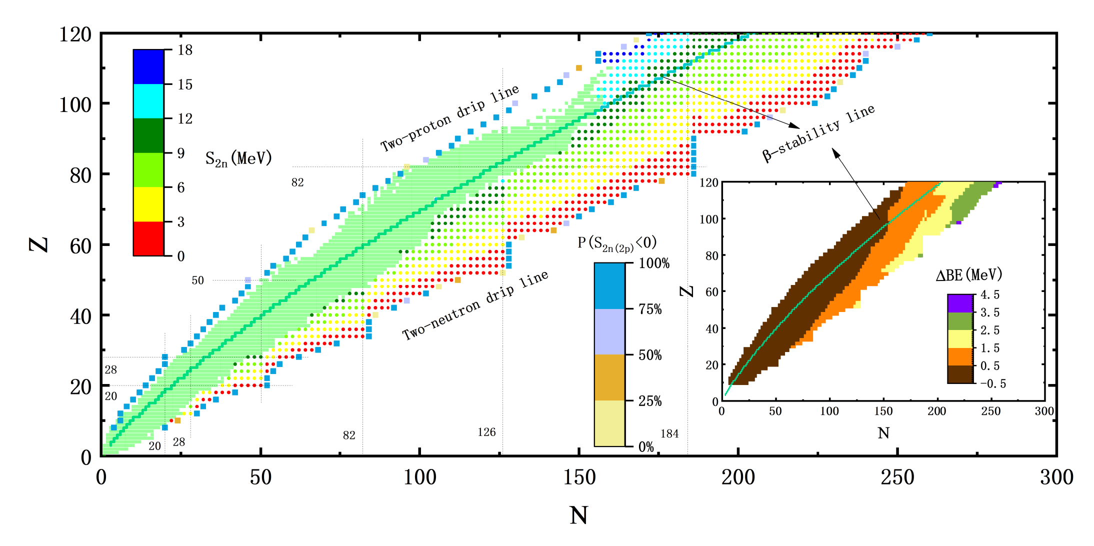


图 2　(在线彩图) DZ10 模型非劣解解集的统计结果图。上、下两侧分别是以概率形式给出的双质子、双中子滴线；绿色方块代表 AME2020 中有质量实验数据的核素；中间的折线为 β 稳定线；颜色圆圈为非劣解下双中子分离能的平均值；右下角子图是 DZ10 基于非劣解解集中质量最优解和次质量最优解所对应参数组的结合能差异图。

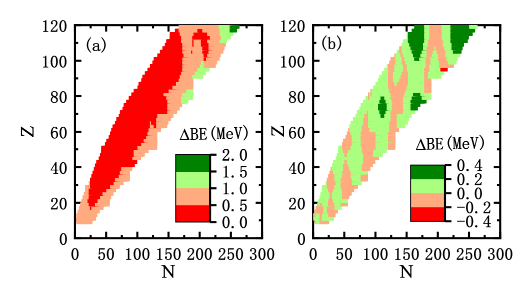


图 3　(在线彩图) 左子图（a）为从图 1的中间区域的两个解对应参数组所给出的结合能差异。右子图（b）为从图 4的中间区域的两个解对应参数组所给出的结合能差异。

潜力解，这些潜力解自然可以提供一些有用信息。表 2从局部和整体两方对潜力解给出系统性分析结果，第二至第四行针对局部丰中子核数据，最后三行针对整体拟合样本数据。其中：第二行为质量最优解计算得出的标准差；第三行为潜力解解集中所给出最好的标准差；第四行为所有潜力解结合能标准差的统计分析，第一项为标准差的平均值，第二项为标准差秒速浮动情况；第五、六、和七行分别为潜力解解集计算拟合样本中结合能、α 衰变能和 GK 关系的统计分析。首先，最好潜力解计算的丰中子核质量标准差远远高于质量最优解结果，约提升70% 的精度。其次，观察表中第四行可知，这些数据点的变化浮动较小，且潜力解解集对 α 衰变能和 GK 关系目标的平均值集中于各自的中间区域，即平衡区域。这在一定程度上验证了上文的论点，平衡多个物理量下的全局解更有可能给出稳定可靠的外推值。

上文在考虑结合能和 α 衰变能的关系下，采用了平衡两者关系的两个全局最优解计算其之间的结合能差异，发现结合能在外推时的差异已经减小，在某种程度上表明过拟合得到一定改善。自然，我们需要考虑在加入了结合能、α 衰变能和 GK 关系下，即更多物理数据的约束下，提取的非劣解的结合能差异情况。图 3的子图（b）为从潜力解解集（即中间区域）任挑两组解计算的结合能差异图。相比于子图（a），子图（b）在外推时的差异更小，表明加入 GK 下的可行性，降低了外推的不确定度。

表 2　潜力解解集的统计分析结果。二至四行为潜力解解集对拟合训练集之外的丰中子核结果；后三行分别代表潜力解解集对训练集内的结合能、α 衰变能和 GK 关系下的结果，单位 MeV。

物理量	数值
σ^{opt}_{BE}	0.435
σ^{PS}_{BE}	0.091
$\sigma^{PS'}_{BE}$	0.304 ± 0.095
$\sigma^{'}_{BE}$	0.823 ± 0.244
$\sigma^{'}_{Q_\alpha}$	0.362 ± 0.016
$\sigma^{'}_{\Delta M_{GK}}$	0.066 ± 0.001

超重核（SHN）的合成一直是核物理的前沿热点研究之一。研究超重核的途径主要是通过 α 衰变，原因在于 α 衰变是超重核的主要衰变模式。我们基于潜力解解集对超重核（$Z \geqslant 104$）的 α 衰变能进行了理论计算。图 5为潜力解解集对所有超重核计算 α 衰变能标准差分布图。由分布情况可知此图粗略符合高斯分布，质量最优解处于分布中后端的位置，而大部分的潜力解集中在质量最优解的左侧，少部分的潜力解在质量最优解的右

侧。这表明在大概率下潜力解所计算超重核的 α 衰变能会比质量最优解更加精确。另外值得一提的是，原子核的壳演化一直是国际上的重点研究方向，研究表明远离 β 稳定线的弱束缚核素可能会出现壳层的演化。DZ 质量模型涉及到关于壳层结构的复杂价核子计算，提前将 Z (N) =8, 20, 28, 50, 82, N=126, 184 的壳层信息输入到质量模型的价核子计算之中，而实验中出现的新幻数尚未被考虑到 DZ 模型的计算中。本文也对此研究进行了初步的尝试。我们在 DZ10 的壳层中添加了 $N=152$ 的中子壳，并对 $126 \leqslant N \leqslant 184$ 的 α 衰变能进行计算，所得结果和实验值差别相对大些，此方法还有待未来进一步的检验。

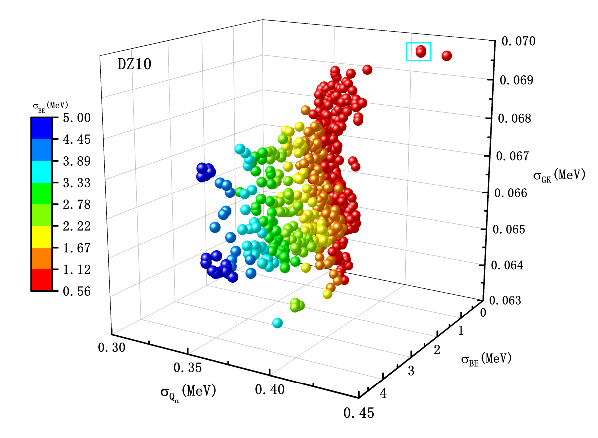


图 4　(在线彩图) DZ10 模型以结合能、α 衰变能和 GK 关系三目标下的非劣解结果图。青色方框包裹的为质量最优解。

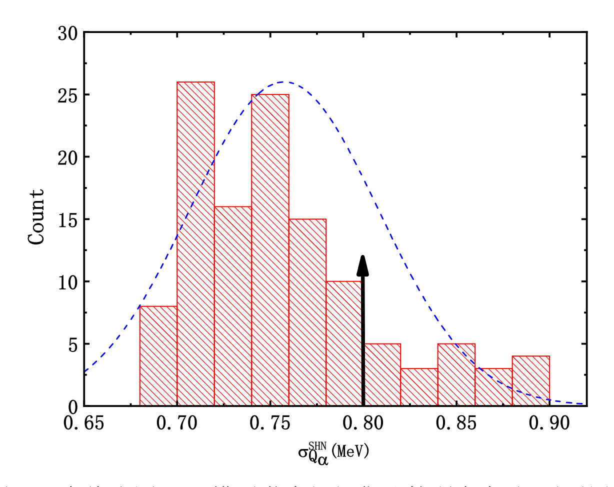


图 5　(在线彩图) DZ 模型潜力解解集计算所有实验已知的超重核（$Z \geqslant 104$）的 α 衰变能标准差的分布情况图。黑色箭头的数值表示质量最优解所计算的超重核衰变能标准差，蓝色虚线表示分布的整体情况。横轴为所有超重核衰变能的标准差，纵轴为潜力解的个数。

4　结论

本文旨在通过添加严格的物理约束，减轻核质量模型的过拟合程度，从而降低模型远距离外推时巨大的不确定度。在多目标优化算法的框架下，引入 α 衰变能和局域质量公式 Garvey-Kelson 关系，起到大幅提升 α 衰变能的精度，增强模型外推能力的效果。此外新核素边界和模型统计不确定度通过多目标方法的统计特征给出。我们从海量的非劣解解集中筛选出更具外推能力的解，(称为潜力解）并对潜力解做出严格的统计分析，得出平衡多个物理量的全局解比单一的质量最优解的预言能力更高。这些物理限制的引入在一定程度上减轻了质量模型的过拟合问题，因此提升了模型在外推时的可靠性。这将会对丰中子核的可靠预言提供一定理论支持。

参考文献

[1] LUNNEY D, PEARSON J, THIBAULT C. Rev Mod Phys, 2003, 75 (3): 1021.
[2] LARSEN A C, SPYROU A, LIDDICK S N, et al. Prog Part Nucl Phys, 2019, 107: 69. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641019300298. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2019.04.002.
[3] YAMAGUCHI T, KOURA H, LITVINOV Y A, et al. Prog Part Nucl Phys, 2021, 120: 103882. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641021000363. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2021.103882.
[4] ERLER J, BIRGE N, KORTELAINEN M, et al. Nature, 2012, 486 (7404): 509.
[5] CHAI Q, QIANG Y, PEI J. Phys Rev C, 2022, 105(3): 034315.
[6] DUFLO J, ZUKER A. Phys Rev C, 1995, 52(1): R23.
[7] MÖLLER P, MYERS W D, SAGAWA H, et al. Phys Rev Lett, 2012, 108(5): 052501.
[8] SCHUETRUMPF B, REINHARD P G, STEVENSON P, et al. Comput Phys Commun, 2018, 229: 211.
[9] NEUFCOURT L, CAO Y, NAZAREWICZ W, et al. Phys Rev C, 2018, 98(3): 034318.
[10] GARVEY G T, KELSON I. Phys Rev Lett, 1966, 16(5): 197.
[11] GARVEY G, GERACE W, JAFFE R, et al. Rev Mod Phys, 1969, 41 (4): S1.
[12] FU G, JIANG H, ZHAO Y, et al. Phys Rev C, 2010, 82(3): 034304.
[13] JIANG H, FU G, SUN B, et al. Phys Rev C, 2012, 85(5): 054303.
[14] DONG J, GU J, ZHANG Y, et al. Phys Rev C, 2019, 99(1): 014319.
[15] DONG J, ZHANG Y, ZUO W, et al. Phys Rev C, 2018, 97(2): 021301.
[16] BAO M, HE Z, LU Y, et al. Phys Rev C, 2013, 88(6): 064325.
[17] BAO M, HE Z, CHENG Y, et al. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2017, 60: 1.
[18] BAO M, LU Y, ZHAO Y, et al. Phys Rev C, 2016, 94(4): 044323.
[19] ZONG Y, LIN M, BAO M, et al. Phys Rev C, 2019, 100(5): 054315.
[20] BAO M, JIANG H, ZHAO Y. Nuclear Physics Review, 2023, 40(2): 141.
[21] NIU Z, LIANG H. Phys Lett B, 2018, 778: 48.
[22] UTAMA R, PIEKAREWICZ J. Phys Rev C, 2017, 96(4): 044308.
[23] UTAMA R, PIEKAREWICZ J. Phys Rev C, 2018, 97(1): 014306.
[24] NIU Z, FANG J, NIU Y, et al. Phys Rev C, 2019, 100(5): 054311.

[25] SHARMA A, GANDHI A, KUMAR A. Phys Rev C, 2022, 105(3): L031306.
[26] MUMPOWER M R, SPROUSE T M, LOVELL A E, et al. Phys Rev C, 2022, 106: L021301. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.106.L021301.
[27] LOVELL A E, MOHAN A T, SPROUSE T M, et al. Phys Rev C, 2022, 106: 014305. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.106.014305.
[28] LI C Q, TONG C N, DU H J, et al. Phys Rev C, 2022, 105(6): 064306.
[29] WU X, LU Y, ZHAO P. Phys Lett B, 2022, 834: 137394.
[30] MUMPOWER M, SPROUSE T, LOVELL A, et al. Phys Rev C, 2022, 106(2): L021301.
[31] SOBICZEWSKI A, LITVINOV Y A. Phys Rev C, 2014, 90(1): 017302.
[32] SOBICZEWSKI A, LITVINOV Y A. Phys Rev C, 2014, 89(2): 024311.
[33] PASTORE A, NEILL D, POWELL H, et al. Phys Rev C, 2020, 101 (3): 035804.
[34] LIU M, WANG N, DENG Y, et al. Phys Rev C, 2011, 84(1): 014333.
[35] GORIELY S, CHAMEL N, PEARSON J. Phys Rev C, 2010, 82(3): 035804.
[36] GORIELY S, CHAMEL N, PEARSON J. Phys Rev C, 2013, 88(2): 024308.
[37] MENDOZA-TEMIS J, HIRSCH J G, ZUKER A P. Nucl Phys A, 2010, 843(1-4): 14.
[38] KIRSON M W. Nucl Phys A, 2012, 893: 27.
[39] MARLER R T, ARORA J S. Struct Multidiscip Optim, 2004, 26(6): 369.
[40] NGATCHOU P, ZAREI A, EL-SHARKAWI A. Pareto multi objective optimization[C]//Proceedings of the 13th International Conference on, Intelligent Systems Application to Power Systems. IEEE, 2005: 84.
[41] TAPIA M G C, COELLO C A C. Applications of multi-objective evolutionary algorithms in economics and finance: A survey[C]//2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2007: 532.
[42] FORTIN F A, PARIZEAU M. Revisiting the nsga-ii crowding-distance computation[C]//Proceedings of the 15th annual conference on Genetic and evolutionary computation. 2013: 623.
[43] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. IEEE Trans Evol Comput, 2002, 6(2): 182.
[44] WANG M, HUANG W, KONDEV F, et al. Chin Phys C, 2021, 45(3): 030003.
[45] BAREA J, FRANK A, HIRSCH J, et al. Phys Rev C, 2008, 77(4): 041304.
[46] ORFORD R, VASSH N, CLARK J, et al. Phys Rev C, 2022, 105: L052802.
[47] PORTER W, ASHRAFKHANI B, BERGMANN J, et al. Phys Rev C, 2022, 105(4): L041301.
[48] LI H, NAIMI S, SPROUSE T, et al. Phys Rev Lett, 2022, 128(15): 152701.

Study of multiple physical constraints on the Duflo-Zuker nuclear mass model

Ye Weihu[1], Qian Yibin[1]

(*1. Department of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

Abstract: Nuclear mass plays an important role in both nuclear physics and astrophysics. While the theoretical accuracy of masses has reached a quite astonishing level, the extrapolations among various predictions have been conflicting, especially in neutron-rich region. In this paper, we review the main results on the extrapolations of nuclear mass formulas that we descerned in recent years. By using a rigorous multi-objective optimization on mass models, we take the mass differences α decay energy and the Garvey-Kelson relations as multiple physical constraints to reduce the degree of overfitting phenomenon, resulting that the predictive power of models was improved in some degree.

Key words: nuclear mass; α decay energy; multi-objective optimization

Received date: 23 Feb. 2024; **Revised date:** 23 Feb. 2024

Foundation item: National Natural Science Foundation of China(12075121); Fundamental Research Funds forthe Central Universities (30922010312);

Corresponding author: Qian Yibin, E-mail: qyibin@njust.edu.cn